Pruebas de Acceso para Mayores de 25 Años
Convocatoria de 2021

SOLUCIONES DEL EXAMEN DE MATEMÁTICAS

PROPUESTA A

A1.a) **[1 punto]** $X \cdot A = C - 2 \cdot B$; $X \cdot A \cdot A^{-1} = (C - 2 \cdot B)A^{-1}$; $X \cdot I = (C - 2 \cdot B)A^{-1}$; $X = \boxed{(C - 2 \cdot B)A^{-1}}$.

Plantear razonadamente todos los pasos: 0,75 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

A1.b) **[1,5 puntos]**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \ C - 2B = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 7 \\ -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}; \ \boxed{X = \begin{pmatrix} -9 & -10 & 13 \\ 5 & 5 & -12 \\ -7 & -11 & 11 \end{pmatrix}}.$$

Calcular A^{-1}: 0,5 *puntos. Calcular $(C - 2 \cdot B)$:* 0,25 *puntos. Realizar las operaciones razonadamente:* 0,5 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

A2.a) **[1,25 puntos]** El rango de la matriz de coeficientes es 3 y el de la matriz ampliada también, por tanto, es un $\boxed{\text{sistema compatible determinado}}$.

Planteamiento del problema: 0,25 *puntos. Proceso de resolución del problema:* 0,75. *Solución correcta:* 0,25.

A2.b) **[1,25 puntos]** La solución del sistema es $\boxed{x = 2, y = -1, z = -1}$.

Explicación del método de resolución: 0,25. *Proceso de resolución del problema:* 0,75. *Solución correcta:* 0,25.

A3.a) **[1,25 puntos]**

Como $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2)$, entonces $|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{6}$.

Explicación del método de resolución: 0,25. *Producto vectorial:* 0,75. *Solución correcta:* 0,25.

A3.b) **[1,25 puntos]** El vector director de la recta es paralelo al vector normal del plano π y, por lo tanto, es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Luego un posible vector director de la recta es $\vec{u} \times \vec{v} = (-1, -1, 2)$. La ecuación continua de la recta pedida es $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

Explicar razonadamente el procedimiento: 0,25. *Obtener el vector normal al plano:* 0,25. *Escribir la ecuación en forma continua:* 0,5. *Solución correcta:* 0,25

A4.a) **[1,25 puntos]**

$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{0}{0}$, indeterminación. Multiplicando por el conjugado del numerador: $\lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \boxed{\frac{1}{4}}$.

Detectar indeterminación y explicar el proceso de resolución: 0,5. *Realizar todos los pasos correctamente:* 0,5. *Solución final:* 0,25.

A4.b) **[1,25 puntos]**

$lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{2x-1}\right)^x = 1^\infty$, indeterminación. Operando en la base y el exponente: $lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2x}{2x-1}\right)^x = lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2x-1}\right)^{2x-1}\right]^{\frac{x}{2x-1}} = e^{lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2x-1}} = \boxed{\sqrt{e}}$.

Detectar indeterminación y explicar el proceso de resolución: 0,5. *Realizar todos los pasos correctamente:* 0,5. *Solución final:* 0,25.

A5.a) **[1,5 puntos]**

En el intervalo $(-\infty, -1)$ la función $f(x)$ es $f(x) = \frac{2}{x+3}$, que es un cociente con un polinomio en el denominador por lo que es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en los puntos donde se anule el denominador; en este caso $x = -3$. Por tanto, $\boxed{f(x) \text{ es continua en } (-\infty, -1) - \{3\}}$.

En el intervalo $(-1, 2)$ la función $f(x)$ es $f(x) = e^{x+1}$, una función exponencial donde el exponente es un polinomio, que es continuo en $\mathbb{R}$. Luego $\boxed{f(x) \text{ es continua en } (-1, 2).}$

En el intervalo $(2, +\infty)$ la función $f(x)$ es $f(x) = x^2 + x - 2$ un polinomio y por lo tanto en continuo en $\mathbb{R}$; por tanto $\boxed{f(x) \text{ es continua en } (2, +\infty)}$.

En el punto $x = -1$ hay que estudiar qué ocurre pues es donde $f(x)$ cambia de expresión:

- $f(-1) = 1$.
- $\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+3} = 1. \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} e^{x+1} = e^0 = 1. \end{cases}$
- $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$ entonces existe $\lim_{x\to -1} f(x) = 1$.
- Y como $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1) = 1$ $\boxed{\text{la función es continua en } x = -1}$.

En el punto $x = 2$ hay que estudiar qué ocurre pues es donde $f(x)$ cambia de expresión:

- $f(2) = e^3$.
- $\begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} e^{x+1} = e^3. \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x^2 + x - 1 = 4. \end{cases}$
- $\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$ entonces no existe $\lim_{x\to -1} f(x)$.
- Por tanto, $\boxed{\text{hay una discontinuidad de salto finito en } x = 2}$.

En $x = -3$ la función no existe y

- $\lim_{x\to -3^-} f(x) = \lim_{x\to -3^-} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{0^-} = -\infty$.
- $\lim_{x\to -3^+} f(x) = \lim_{x\to -3^+} \frac{2}{x+3} = \frac{2}{0^+} = +\infty$.
- Por tanto, $\boxed{\text{hay una discontinuidad de salto infinito en } x = -3}$.

Análisis de la continuidad para todos los puntos excepto $x = 1, 2, -3$: 0,5. *Análisis de la discontinuidad en $x = 1, 2$:* 0,25. *Clasificación de la discontinuidad en $x = 1, 2$:* 0,25. *Análisis de la discontinuidad en $x = -3$:* 0,25. *Clasificación de la discontinuidad en $x = -3$:* 0,25.

A5.b) [**1 punto**]

El punto de tangencia es $(-2, f(-2))$, con $f(-2) = 2$. Además, $f'(x) = -2/((x+3)^2)$, por lo que $f'(-2) = 2$. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = -2$ es $\boxed{y - 2 = -2(x+2)}$.

Cálculo del punto de tangencia: 0,25. *Cálculo de la pendiente:* 0,5. *Ecuación de la recta:* 0,25.

A6.a) Probabilidad de que la mascarilla sea de la fábrica A, B o C, respectivamente, $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}30$ y $P(C) = 0{,}20$. La probabildiad de que sea defectuosa (D) si se fabricó en esas fábricas es, 0,015, 0,02 y 0,01, respectivamente.

a.1) [**0,75 puntos**] La probabildiad de que una mascarilla al azar sea defectuosa es $P(D) = P(A)\cdot P(D \mid A) + P(B)\cdot P(D \mid B) + P(C)\cdot P(D \mid C) = 0{,}5\cdot 0{,}015 + 0{,}3\cdot 0{,}02 + 0{,}20\cdot 0{,}01 = \boxed{0{,}0155}$.

Explicación y planteamiento: 0,5. *Resultado correcto:* 0,25.

a.2) [**0,5 puntos**] La probabilidad de que la mascarilla haya sido fabricada por la fábrica B dado que es defectuosa se calcula con el Teorema de Bayes: $P(B \mid D) = P(D \mid B)P(B)/P(D) = 0{,}3\cdot 0{,}02/0{,}0155 = \boxed{0{,}3871}$.

Explicación y planteamiento: 0,25. *Resultado correcto:* 0,25.

A6.b) La producción media de cada máquina de la fábrica A, X, es una variable aleatoria normal de media $\mu = 10000$ y desviación típica $\sigma = 110$.

b.1) [**0,5 puntos**] $P(X > 10100) = 1 - P(X < 10100) = 1 - P(Z < \frac{10100-10000}{110}) = 1 - P(Z < 0{,}9) = 1 - 0{,}8159 = \boxed{0{,}1841}$.

Definición de la variable, planteamiento del problema y tipificación: 0,25. *Resolución:* 0,25.

b.2) [**0,75 puntos**]

$P(9950 < X < 10050) = P(X < 10050) - P(X < 9950) = P(Z < \frac{5}{11}) - P(Z < \frac{-5}{11}) = P(Z < \frac{5}{11}) - (1 - P(Z < \frac{5}{11})) = 2\cdot P(Z < \frac{5}{11}) - 1 = 2\cdot 0{,}6736 - 1 = \boxed{0{,}3472}$.

Planteamiento del problema: 0,25. *Resolución:* 0,25, *Obtención del resultado final:* 0,25.

PROPUESTA B

B1.a) **[1 punto]** Como $\boxed{|A| = -1} \neq 0$, $\boxed{\text{el rango de } A \text{ es } 3}$ y la matriz A tiene inversa.

La inversa de A es $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix}}$.

Cálculo del determinante de A: 0,25. *Justificar el rango de A:* 0,25. *Cálculo de la inversa de A:* 0,25. *Resultado final correcto:* 0,25.

B1.b) **[1,5 puntos]** $X \cdot A + B^\top = A$; $X \cdot A = A - B^\top$; $X \cdot A \cdot A^{-1} = (A - B^\top) \cdot A^{-1}$; $X \cdot I = A \cdot A^{-1} - B^\top \cdot A^{-1}$; $X = I - B^\top \cdot A^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -8 & 6 \\ -2 & 12 & -7 \\ -6 & 23 & -14 \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 2 & -11 & 7 \\ 6 & -23 & 15 \end{pmatrix}}$$

Despejar X correctamente: 0,5 *puntos. Inversa de A:* 0,5. *Realización del producto* $B^\top \cdot A^{-1}$*:* 0,25 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

B2.a) **[1,25 puntos]** El rango de la matriz de coeficientes es 2, y el rango de la matriz ampliada también es 2. Por tanto, se trata de un $\boxed{\text{sistema compatible indeterminado}}$.

Planteamiento del problema: 0,25 *puntos. Proceso de resolución:* 0,75. *Discusión razonada en este caso:* 0,25 *puntos.*

B2.b) **[1,25 puntos]** La solución del sistema es $\boxed{x = -\frac{10}{7} - \frac{4}{7}t,\ y = \frac{8}{7} + \frac{13}{7}t,\ z = t}$.

Explicación del método de resolución: 0,25. *Proceso de resolución del problema:* 0,75. *Solución correcta:* 0,25.

B3.a) **[1,25 puntos]**

Para que los tres vectores sean linealmente dependientes el determinante formado por los tres vectores debe valer cero: $\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 3 + 3a + 6a = 3 - 3a; 3 - 3a = 0 \longleftrightarrow a = 1$. Entonces, para $\boxed{a = 1}$ los tres vectores son linealmente dependientes.

Producto vectorial: 0,75. *Obtención del valor de a:* 0,5.

B3.b) **[1,25 puntos]**

El plano tendrá como vectores directores $\vec{u} = (2, 1, 1)$ y $\vec{PQ} = (2, 3, 2)$. Podemos tomar como punto P o Q. Por ejemplo, si elegimos P, la ecuación del plano será:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z+3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to -x - 2y + 4z + 14 = 0 \to \boxed{x + 2y - 4z - 14 = 0}.$$

Explicar razonadamente el procedimiento: 0,25. *Producto vectorial:* 0,5. *Escribir la ecuación implícita:* 0,25. *Solución correcta:* 0,25.

B4.a) **[1,25 puntos]** La derivada de la función es $f^{'}(x) = 6 \cdot (x^2 - x - 2)$. Buscamos los intervalos en los que la derivada es positiva (función creciente) y negativa (decreciente). Primero veamos cuando la derivada es cero: $f^{'}(x) = 0$ cuando $x = -1$ o $x = 2$. $\boxed{\text{La función } f(x) \text{ crece en } (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \text{ y decrece en } (-1, 2)}$.

$\boxed{\text{Los extremos relativos son } x = -1 \text{ y } x = 2}$. $x = 1$, punto de la gráfica $(-1, 15)$ y es un máximo, y $x = 2$, punto de la gráfica $(2, -12)$ y es mínimo.

Cálculo de la derivada: 0,25. *Identificación de los extremos relativos y su tipo:* 0,5. *Identificación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento:* 0,5.

B4.b) **[1,25 puntos]** Los puntos de inflexión de la gráfica se encuentran entre los puntos en los que $f''(x) = 0$. Como $f''(x) = 6 \cdot (2x - 1)$, tenemos que el único punto donde $f''(x) = 0$ es $x = 1/2$. Estudiando el signo de la derivada a cada lado vemos que es un punto de inflexión.

Tenemos que $f'(1/2) = -27/2$ y $f(1/2) = 3/2$. La ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1/2$ es $y - 3/2 = -(27/2)(x - 1/2)$.

Identificación del punto de inflexión: 0,5. *Derivada en el punto de inflexión:* 0,25. *Ecuación de la recta tangente:* 0,25. *Solución correcta:* 0,25.

B5.a) **[1 punto]** $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-x-2}\,dx = \int\left(\frac{-2/3}{x+1}+\frac{5/3}{x-2}\right)dx = \boxed{-\frac{2}{3}ln|x+1|+\frac{5}{3}ln|x-2|+C}$.

Identificar tipo de integral y plantear resolución: 0,25. *Proceso de resolución:* 0,5. *Solución fnal correcta:* 0,25.

B5.b) **[1,5 puntos]** Solución de la integral por partes: $\left\{\begin{array}{lll} u=x-1 & \longrightarrow & du=dx \\ dv=e^{x+1}dx & \longrightarrow & v=e^{x+1}\end{array}\right.$.

$\displaystyle\int (x-1)e^{x+1}\,dx = (x-1)\cdot e^{x+1} - \int e^{x+1}dx = (x-1)\cdot e^{x+1} - e^{x+1} + C = \boxed{(x-2)e^{x+1}+C}$.

$\displaystyle\int_0^2 (x-1)e^{x+1}\,dx = [(x-2)e^{x+1}]_0^2 = (2-2)e^{2+1}-(0-2)e^{0+1} = 0+2e = \boxed{2e}$.

Plantear partes y explicar: 0,5 *puntos. Proceso de resolución:* 0,75 *puntos. Regla de Barrow y resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

B6.a) La probabilidad de sacar oros en la baraja (O) es $10/40 = 1/4$ y de scar otro palo $(\overline{O})$ es $3/4$. La probabilidad de sacar una bola negra (N) de la urna a es $3/8$ y la de sacarla de la urna B es $4/10$.

a.1) **[0,5 puntos]** $P(N) = P(O)\cdot P(N \mid A) + P(\overline{O})\cdot P(N \mid B) = \frac{1}{4}\frac{3}{8} + \frac{3}{4}\frac{4}{10} = \boxed{0{,}39375}$.

Explicación y planteamiento: 0,25. *Resultado correcto:* 0,25.

a.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que si la bola es negra haya salido de la urna B (porque no ha salido una carta de oros) se calcula con el Teorema de Bayes: $P(B \mid N) = PN \mid \overline{O})P(\overline{O})/P(N) = (\frac{3}{4}\frac{4}{10})/0{,}39375 = \boxed{0{,}7619}$.

Explicación y planteamiento: 0,25. *Cálculo de probabilidades auxiliares:* 0,25. *Resultado correcto:* 0,25.

B6.b) El número de canastas encestadas, X, es una variable aleatoria binomial con $n = 5$ y $p = 0{,}6$.

b.1) **[0,5 puntos]** $P(X = 2) = \boxed{0{,}2304}$.

Definición de la variable y planteamiento del problema: 0,25. *Resultado final correcto:* 0,25.

b.2) **[0,75 puntos]** $P(X \leq 3) = 1 - P(X = 4) - P(X = 5) = 1 - 0{,}2592 - 0{,}0778 = \boxed{0{,}663}$.

Planteamiento del problema: 0,25. *Cálculo de probabilidades auxiliares:* 0,25. *Obtención del resultado final correcto:* 0,25.