Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Opción A

1. *Dada la matriz* $M = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *se pide:*

a) Realiza el producto $M \cdot M^t$ *(siendo* M^t *la matriz transpuesta de* M *). (0.5 ptos)*

b) Despeja X *en la siguiente expresión matricial:* $P \cdot X = M \cdot M^t$. *(0.5 ptos)*

c) Si $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *, obtén la expresión de la matriz* X *del apartado anterior. (0.5 ptos)*

Solución:

a) $M \cdot M^t = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (0.5 ptos)

b) $X = P^{-1} \cdot M \cdot M^t$ (0.5 ptos)

c) $P = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ (0.25 ptos por la inversa)

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -16 & -8 \end{pmatrix}$ (0.25 por el producto)

2. *A través de una página de internet se han vendido hoy 320 entradas para tres eventos distintos: un estreno de cine, una función teatral y un concierto de música. El valor de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que una entrada de cine vale 8 euros, una de teatro 20 euros y una para el concierto de música vale 30 euros. El número de entradas para el concierto musical es triple que las de teatro.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas entradas se han vendido para cada uno de los eventos. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) 0.5 ptos por cada ecuación bien planteada.

b) 0.5 puntos por la resolución correcta del sistema planteado en a)

Si llamamos x = nº de entradas de cine. y = nº de entradas de teatro, z= nº de entradas para el concierto.

Tenemos:

$$\begin{array}{l} (I)\ x + y + z = 320 \\ (II)\ 8x + 20y + 30z = 6460 \\ (III)\ z = 3y \rightarrow -3y + z = 0 \end{array}$$

La solución es: x = 120 ; y = 50 ; z = 150

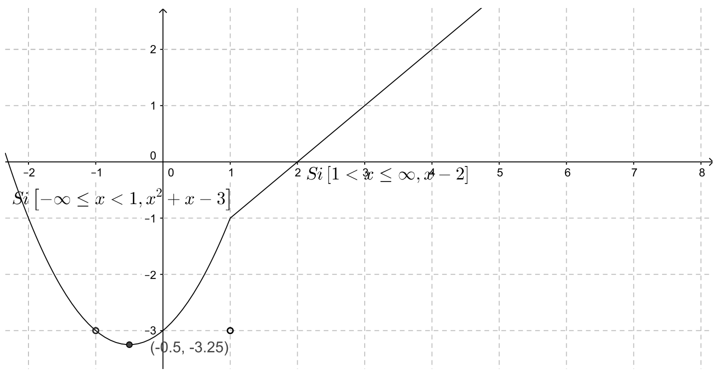
3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 3 & si\ x \leq 1 \\ x + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t *la función* $f(x)$ *es continua en* $x = 1$*? (0.5 ptos)*

b) Para $t = 0$*, calcula los extremos relativos de la función* $f(x)$ *en el intervalo* $(-\infty, 1)$*. (0.5 ptos)*

c) Para $t = 0$*, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función* $f(x)$ *en* $(-\infty, 1)$*. (0.5 ptos)*

Solución:



a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese pto con sus límites laterales.

Saber condiciones. (0.25 ptos)

Cálculo correcto del valor, t=-2. (0.25 ptos)

b)

Saber condiciones de extremo. (0.25 ptos)

Tiene un mínimo en (-0.5,-3.25) (0.25 ptos)

c)

En ($-\infty$,-0.5) decreciente y en (-0.5,1) creciente

(0.5 ptos)

4. *De la función $H(x) = a\,x^3 + b\,x + c$ sabemos que tiene un punto de inflexión en (0 , $\frac{2}{3}$) y un máximo relativo en el punto (4 , 6). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

Solución:

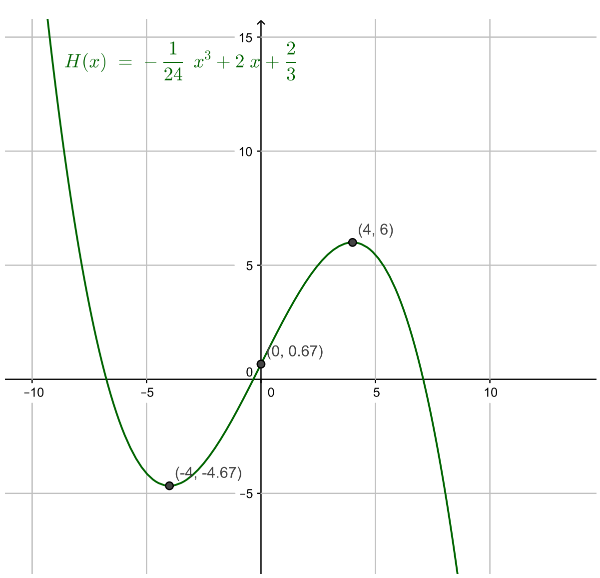
Si pasa por (0 , 2/3) $\Rightarrow \quad H\ (0) = \frac{2}{3} = c$ (0.25 ptos)

Si tenemos en cuente que la curva pasa por (4 , 6): $H\ (4) = 6 \quad \Rightarrow \quad 6 = 64\,a + 4\,b + \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{3} = 64\,a + 4\,b \quad \Rightarrow$ $4 = 48a + 3\,b \quad (I)$ (0.5 ptos)

Realizamos la derivada primera: $H'(x) = 3\,a\,x^2 + b$ (0.25 ptos) y si tenemos en cuenta que en x = 4 hay un máximo relativo:

$$H'\ (4) = 48\,a + b = 0 \ \Rightarrow \ 0 = 48\,a + b \quad (II) \text{(0.25 ptos)}$$
$$Restando \quad (I) - (II) \quad \Rightarrow \quad 4 = 2\,b \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Y por lo tanto: $a = -\frac{b}{48} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{24}$ de modo que la función queda: $H(x) = -\frac{1}{24}\,x^3 + 2\,x + \frac{2}{3}$ (0.25 ptos)



5. *En un instituto el 45 % de los estudiantes son de la modalidad de Ciencias, el 35 % son de la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales y el resto son de la modalidad de Arte. También se sabe que el 10 % de los estudiantes de Ciencias tienen una nota media superior a 8, el 20 % de los de Humanidades y Ciencias Sociales y el 25 % de los de la modalidad de Arte.*

a) Calcule la probabilidad de que un estudiante, elegido al azar, tenga una nota media superior a 8. (0.75 ptos)

b) Si tenemos un estudiante que tiene una nota media menor o igual a 8, ¿cuál es la probabilidad de que sea Ciencias? (0.75 ptos)

Solución:

a) C= Ciencias; H=humanidades; A=arte; S8=nota superior a 8;

P(C)=0.45; P(H)=0.35; $P(A)$=0.2;

P(S8/C)=0.1; P(S8/H)=0.2; P(S8/A)=0.25

Plantear probabilidades (0.25 ptos)

$P(S8) = P(S8 \cap C) + P(S8 \cap H) + P(S8 \cap A)$= 0.45*0.1+0.35*0.2+0.2*0.25=0.165 (0.5 ptos)

b)

$P(C/S8^c) = P(C \cap S8^c)/P(S8^c) = P(S8^c \cap C)/(1 - P(S8))$=(0.45*0.9)/(1-0.165)=0.4850299 (0.75 ptos)

6. *Los tiempos que tardan unos corredores en recorrer 6 kilómetros sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =10 minutos. Se eligen al azar 10 corredores y se mide el tiempo que tardan en hacer los seis kilómetros, siendo estos: 15, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 30 y 32 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo medio que tarda los corredores en hacer los 6 kilómetros, con un nivel de confianza del 95 % (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{x} = \frac{15+19+20+22+24+25+27+28+30+32}{10} = 24.2$ minutos (0.25 puntos)

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y σ=10 minutos

1- α =0.95 $\Rightarrow$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1.96 (0.25 puntos); IC= ($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 puntos)

IC= (24.2-1.96$\frac{10}{\sqrt{10}}$, 24.2+ 1.96$\frac{10}{\sqrt{10}}$) = (18.002, 30.398) (0.5 puntos)

b) El error viene dado por E= $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (0.25 puntos)

para E= 1 $\Rightarrow$ $n = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\ \sigma}{E}\right]^2 = \left[\frac{1{,}96 \cdot 10}{1}\right]^2 = 384.16$ (0.5 puntos)

El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea

inferior a un minuto, con el mismo nivel de confianza debe ser 385.

Opción B

1. *Considera el siguiente problema de programación lineal:*

Minimizar la función $F = 5\,x + 3\,y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

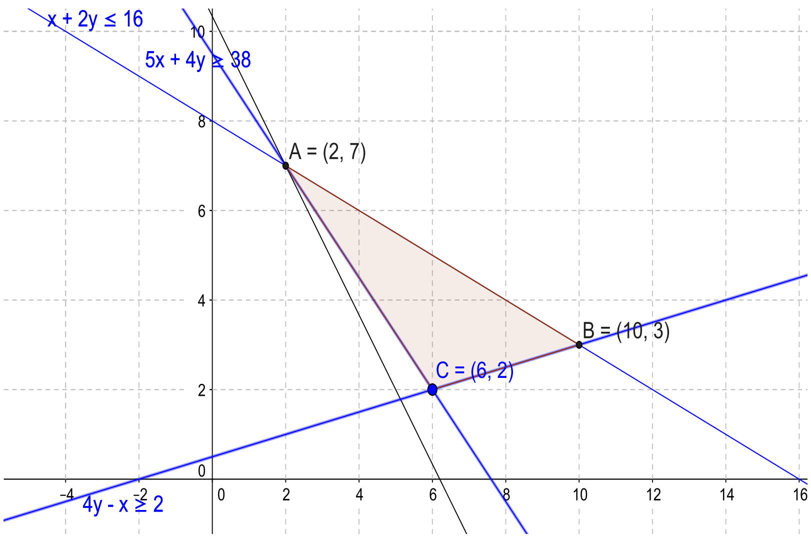
$x + 2\,y \le 16 \quad ; \quad 5\,x + 4y \ge 38 \quad ; \quad 4\,y - x \ge 2$

a) Dibuja la región factible (1 pto).

b) Determina los vértices de la región factible (0.25 ptos).

c) Indica la solución óptima del problema dado y su valor (0.25 ptos).

Solución:

a) 

0.25 ptos por cada inecuación bien dibujada. Todo correcto 1 punto.

b) Los vértices de la región factible son: A (2, 7) , B (10, 3) , C (6, 2). (0.25 ptos)

c) Valor de la función objetivo en cada uno de los vértices:

F (A) $= 5 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 31$; F (B) $= 5 \cdot 10 + 3 \cdot 3 = 59$; F (C) $= 5 \cdot 6 + 3 \cdot 2 = 36$

La solución óptima se produce en el vértice A, donde la función F alcanza su valor mínimo: F (A) = 31. (0.25 ptos)

2. *Un coleccionista de objetos antiguos tiene 40 pesas; algunas son de 200 g, otras son de 100 g y también tiene algunas pesas de 50 g. El número de pesas de 50 g supera en ocho a la suma de las pesas de 200 g y las de 100 g. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3400 g.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas pesas de cada valor posee el coleccionista. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) 0.5 ptos por cada ecuación bien planteada.

b) 0.5 puntos por la resolución correcta del sistema planteado en a)

Si llamamos x = nº de pesas de 200 g y = nº de pesas de 100 g z= nº de pesas de 50 g.

Tenemos:

$$\begin{array}{ll} (I) & x + y + z = 40 \\ (II) & z = x + y + 8 \;\rightarrow\; -x - y + z = 8 \\ (III) & 200\,x + 100\,y + 50\,z = 3400 \end{array}$$

La solución es: x = 6 ; y = 10 ; z = 24

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \leq 1 \\ (x-2)^2 + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 1. (0.5 ptos)

b) Para t = 0, representa gráficamente la función f. (1 pto)

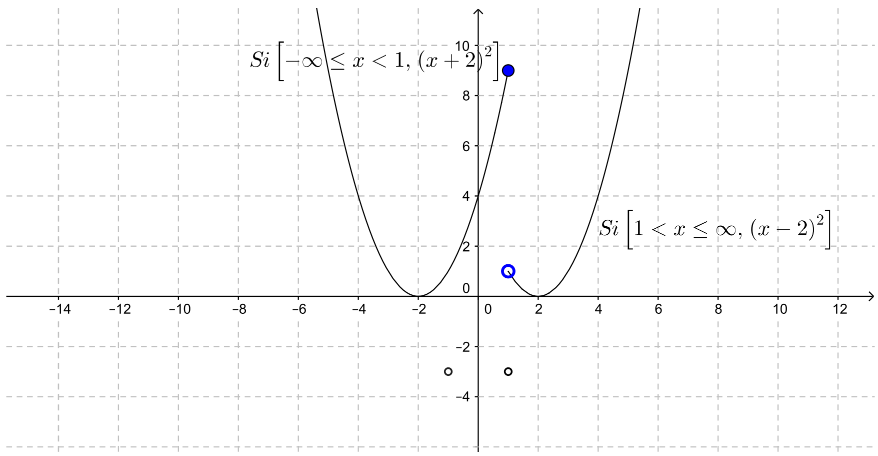
Solución:

a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 puntos)

Cálculo correcto del valor, t=8 (0.25 puntos)

b)



0.25 ptos por cada trozo bien dibujado. Todo correcto 1 pto.

4. *En cierta sala de cine, una película permanece en cartel 16 semanas. La recaudación en taquilla de esta película a lo largo de cada una de esas 16 semanas se ajusta a la función:*

$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 36\,x + 150$ *donde* $0 \leq x \leq 16$ *está en semanas y F(x) es la recaudación en cientos de euros. Se pide:*

a) Cuál es la recaudación en el momento del estreno (x=0) y cuál es la recaudación al final (x=16). (0.5 ptos)

b) En qué intervalo o intervalos crece esta función y en cuál o cuáles decrece. (0.5 ptos)

c) En qué momentos se alcanzan las recaudaciones máxima y mínima respectivamente, y a cuánto ascienden estas recaudaciones. (0.5 ptos)

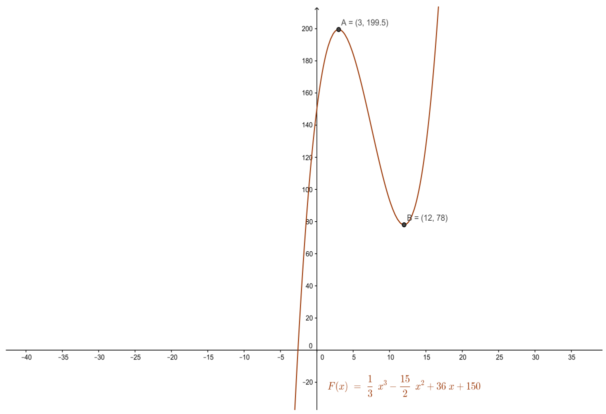
Solución:

a) F (0) = 150 (15000 euros) (0.25 ptos) y F (16) = 171.3 (17133.33 euros) (0.25 ptos)

b) Calculamos la derivada primera: $F'(x) = x^2 - 15, x + 36 = (x-3)(x-12)$ si analizamos el signo de esta función comprobamos que : $\begin{cases} crece: & (0,3) \bigcup (12,16) \\ decrece: & (3,12) \end{cases}$ (0.5 ptos)

c) $F'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 12 \end{cases}$ y realizando la derivada segunda:

$F''(x) = (2x - 15) \Rightarrow \begin{cases} F''(3) = -9 < 0 \Rightarrow x = 3\ es\ un\ \text{máximo} \\ F''(12) = 9 > 0 \Rightarrow x = 12\ es\ un\ \text{mínimo} \end{cases}$ Las recaudaciones correspondientes a estos momentos son: F (3)= 199.5 (19950 euros) y F (12)= 78 (7800 euros). (0.5 ptos)



5. *En una empresa hay dos categorías para los empleados, en la categoría A se encuentra el 80 % de los empleados y el resto en la B. El 10 % de los empleados de la categoría A tiene contrato temporal mientras que en la categoría B este porcentaje es del 30 %.*

a) Elegido un empleado al azar de esa empresa, ¿cuál es la probabilidad de que tenga contrato temporal? (0.75 ptos)

b) Se escoge un empleado al azar y tiene contrato temporal, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la categoría B? (0.75 ptos)

Solución:

A=categoría A; B=categoría B; P(A)=0.8; P(B)=0.2

CT=contrato temporal; P(CT/A)=0.1; P(CT/B)=0.3

a)

Plantear probabilidades (0.25 ptos).

$P(CT) = P(CT/A) * P(A) + P(CT/B) * P(B)$=0.8*0.1+0.2*0.3=0.14 (0.5 ptos)

b) $P(B/CT) = P(CTyB)/P(CT) = (P(CT/B) * P(B))/P(CT)$ =0.2*0.3/0.14=0.4285 (0.75 ptos)

6. *El gasto por hogar en teléfonos móviles e internet sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 30 euros. Tomando una muestra aleatoria de 9 hogares, se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza para la media poblacional (128.3, 171.7).*

a) Calcula el nivel de confianza del intervalo y calcula el valor que se obtuvo para la media muestral. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 96.6 %? (0.75 ptos)

Solución:

Del enunciado se deduce: $\sigma = $ 30 euros

$\bar{x}$=(128.3+171.7)/2=150 euros (0.25 ptos)

IC=($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) = (128.3, 171.7) (0.25 ptos)

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 21,7/($\frac{30}{\sqrt{9}}$)=2.17 (0.5 ptos)

De la tabla obtenemos que el nivel de confianza es del 97 %. (0.25 ptos)

b)

$1 - \alpha$ =0.966, α=0.34, $\leftarrow \alpha/2$ =0.017, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =2.12 (0.25 ptos)

Error máximo admisible=E= $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$=2.12 $\frac{30}{\sqrt{100}}$ =6.36 (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857